

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

7 Σεπτεμβρίου 2018

Θέμα 1. [0.5+0.5] Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα όρια

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq y}} \sqrt{\frac{|x+y|}{|x-y|}} \quad \text{και} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos x - 1 - (x^2/2)}{x^4 + y^4}.$$

Θέμα 2. [1.5] Έστω $f(x, y, z) = 1 - z + x^2 + y^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(α') Δώστε το σύνολο στάθμης 1 της f , δηλ. το $S := L_f(1)$.

(β') Δώστε το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο σημείο $(1, 1, 2)$.

(γ') Έστω $\tilde{\gamma} : (-1, 1) \rightarrow S$ μια κανονική καμπύλη. Δείξτε ότι η κλίση της f στο σημείο $\tilde{\gamma}(0)$ είναι κάθετη στο εφαπτόμενο διάνυσμα της $\tilde{\gamma}$ στο $\tilde{\gamma}(0)$.

Θέμα 3. [0.5+1+0.5] Έστω $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \sqrt{|x|}\}$ και $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x, y) \in U, \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus U. \end{cases}$$

(α') Σχεδιάστε το U και δώστε, χωρίς απόδειξη, το εσωτερικό, το εξωτερικό και το σύνορό του.

(β') Εξετάστε την f σε κάθε σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ως προς τη συνέχεια, μερική διαφορισιμότητα και διαφορισιμότητά της.

(γ') Εξετάστε σε ποιά σημεία $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και για ποιές κατευθύνσεις $\tilde{\nu} \in \mathbb{R}^2$, $\|\tilde{\nu}\| = 1$, υπάρχει η παράγωγος κατά κατεύθυνση $\tilde{\nu}$ της f στο σημείο (x_0, y_0) .

Θέμα 4. [1.5] Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της $f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, και χαρακτηρίστε τα.

Θέμα 5. [1] Έστω $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\tilde{\gamma} \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ και $g = f \circ \tilde{\gamma}$. Εκφράστε την g'' χρησιμοποιώντας την κλίση και τον Εσσιανό πίνακα της f και τις $\tilde{\gamma}'$, $\tilde{\gamma}''$.

Θέμα 6. [1] Έστω $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Υπολογίστε το πολυώνυμο βαθμού (ή τάξης) 2 της f στο $(0, 0)$, δηλ. το $T_{2,f,(0,0)}(x, y)$, και επαληθεύστε, χωρίς χρήση του Θεωρήματος Taylor, ότι

$$f(x, y) = T_{2,f,(0,0)}(x, y) + o(x^2 + y^2) \quad \text{για} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Θέμα 7. [0.5+0.5] Έστω η καμπύλη $\tilde{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, \sin(t/2))$, $t \in \mathbb{R}$.

(α') Βρείτε τα σημεία της καμπύλης με τη μεγαλύτερη και αυτά με τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων και δώστε τις αποστάσεις αυτές.

(β') Εξετάστε αν το σύνολο $\{\tilde{\gamma}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ είναι συμπαγές.

Θέμα 8. [1] Έστω $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτά, $\tilde{f} : U \rightarrow V$ και \tilde{f}^{-1} διαφορίσιμες. Αν $\tilde{x}_0 \in U$ με $D\tilde{f}(\tilde{x}_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αντιστρέψιμο και $\tilde{y}_0 = \tilde{f}(\tilde{x}_0)$, δείξτε, χωρίς χρήση του Θεωρήματος Αντίστροφης Συνάρτησης, ότι

$$D(\tilde{f}^{-1})(\tilde{y}_0) = D\tilde{f}(\tilde{x}_0)^{-1}.$$

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!